

Wozu braucht man ein Polarplanimeter?

Planimeter (lat. *planis* = eben, griech. *metrein* = messen) sind mechanische Messgeräte, mit denen man ebene Flächen in Karten, Plänen, Diagrammen und Konstruktionszeichnungen ausmessen kann, indem man mit einem Fahrstift den Rand der gewünschte Fläche im Uhrzeigersinn abfährt.

Wie ist ein Polarplanimeter aufgebaut?

Das Polarplanimeter besteht aus einem Gelenk G mit zwei Armen, den sog. Fahrarm f und Polarm q . Der Pol P , um den der Polarm q drehbar gelagert ist, wird auf dem Papier fixiert. Mit dem freien Ende des Fahrarmes, an dessen Ende ein Fahrstift F montiert ist, wird die Randkurve der Fläche umfahren. Am Fahrarm ist zudem in der Nähe des Gelenks ein Messrad M angebracht, dessen Drehachse parallel zum Fahrarm liegt.

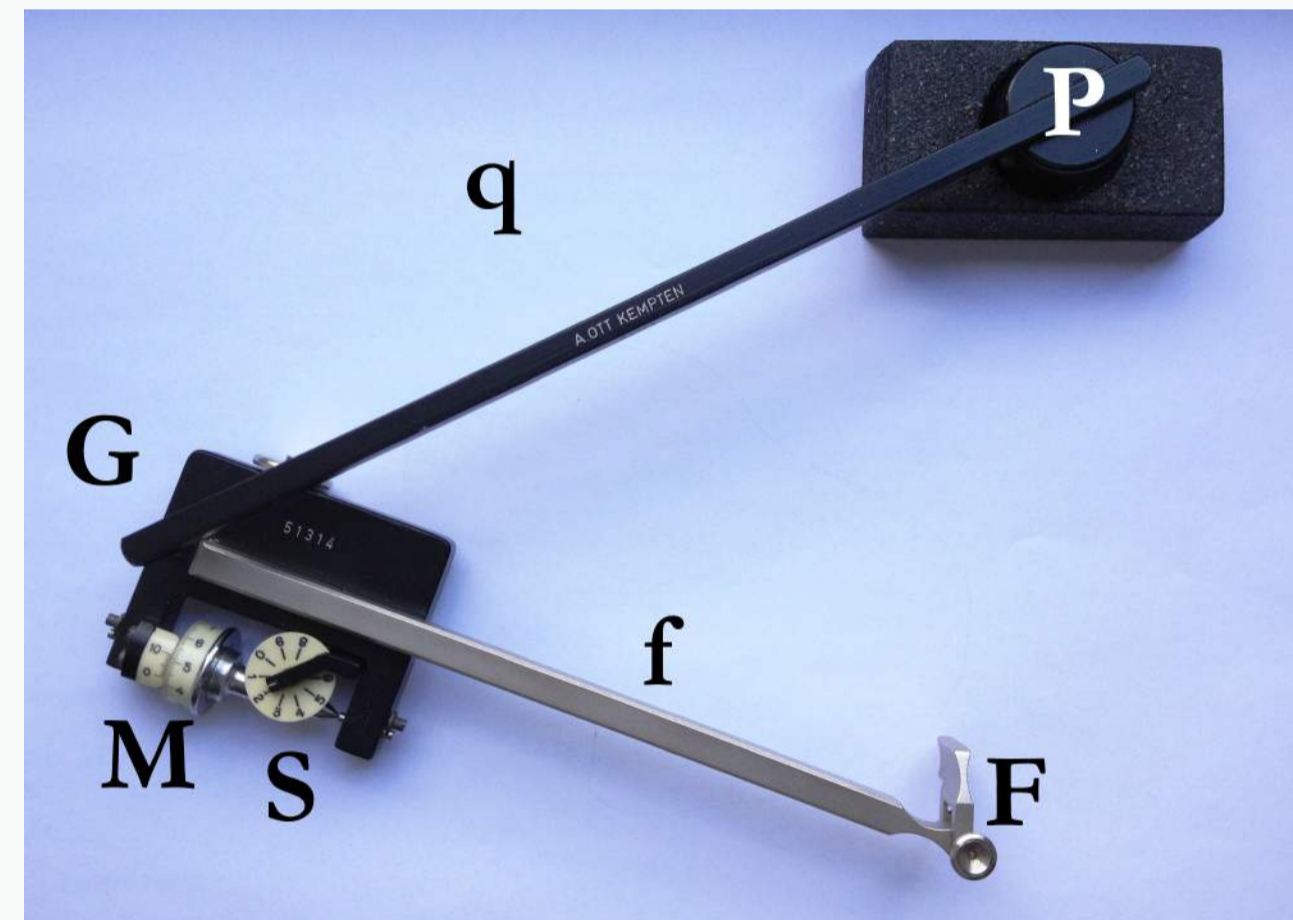


Abbildung: Das Polarplanimeter

Wie misst das Planimeter?

Der Inhalt der Fläche wird gemessen, indem man die Randlinie einmal vollständig mit dem Fahrstift F im Uhrzeigersinn umfährt. Bei der Bewegung des Fahrstiftes gleitet und rollt das Rädchen über das Papier, je nachdem in welche Richtung der Stift geführt wird. Das Rad dreht sich dabei nur mit der Bewegungskomponente senkrecht zu seiner Drehachse vor und zurück. Die Bewegungskomponente parallel zum Fahrarm wird nicht registriert. Das Rädchen rollt einen Weg u ab, den das Messwerk M anzeigt. An einem zweiten Rad werden über ein Schneckengetriebe S die vollen Umläufe des Messrades gezählt. Da u direkt proportional zur umfahrenen Fläche ist, muss der abgelesene Wert nun nur noch mit einem Kalibrierungsfaktor multipliziert werden, um den Inhalt der umfahrenen Fläche zu erhalten. Das vorliegende Planimeter hat zudem eine lösbare Verbindung zwischen Pol- und Fahrarm. Dadurch kann die Messung in beide Richtungen durchgeführt werden, um Fehler bei der Messung zu kompensieren. Daher nennt man es auch ein Kompensations-Polarplanimeter.

Wer kam auf die geniale Idee?

Ältere Geräte ermittelten den Inhalt von krummlinig begrenzten Ebenenstücke durch Auslegung von Quadraten oder Parallelstreifen. Das erste Umfahrungsplanimeter wurde im Herbst 1814 von Johann Martin Hermann erfunden. Es geriet jedoch in Vergessenheit. Erst im Jahre 1854 erfanden Amsler und Miller fast gleichzeitig und unabhängig voneinander das Polarplanimeter. Ott und Coradi, die die zwei vorliegenden Kompensations-Polarplanimeter bauten, lernten diese Apparate kennen und bauten von 1874 ab in einer gemeinsam gegründeten Firma Planimeter nach dem Amsler Konstrukt bis Coradi 1880 ausschied und eine eigene Firma in Zürich gründete. "Wie sind die Erfinder auf dieses Instrument gekommen? Durch Überlegung oder durch Probieren? Man kann die Wirkungsweise mathematisch durch eine komplizierte aufwändige Überlegung erklären. Stand sie am Anfang? Wir wissen es nicht." (Vollrath 2013, S.63)

Geometrische Erklärung

Wir denken uns nun eine blaue Fläche $ABCD$, deren Inhalt M sei. Der Fahrarm bestreicht von seiner Anfangsstellung GA bis zur Stellung HC die Fläche $GABCHG$. Diese Fläche können wir als positiv betrachten, da sich das Messrad mitdreht, wenn das Gelenk auf der Kreisbahn um P im Uhrzeigersinn läuft. Auf dem Weg des Fahrstiftes von C über D nach A zurück überstreicht der Fahrarm die gelbe Fläche ($= HCDAGH$). Da diese Bewegung des Gelenks auf dem Kreis gegen den Uhrzeigersinn erfolgt, rollt das Rad nun in die entgegengesetzte Richtung. Die vom Fahrarm überstrichene Fläche ist also negativ. Die Summe dieser beiden Flächen ist offenbar der Inhalt der blauen Fläche M .

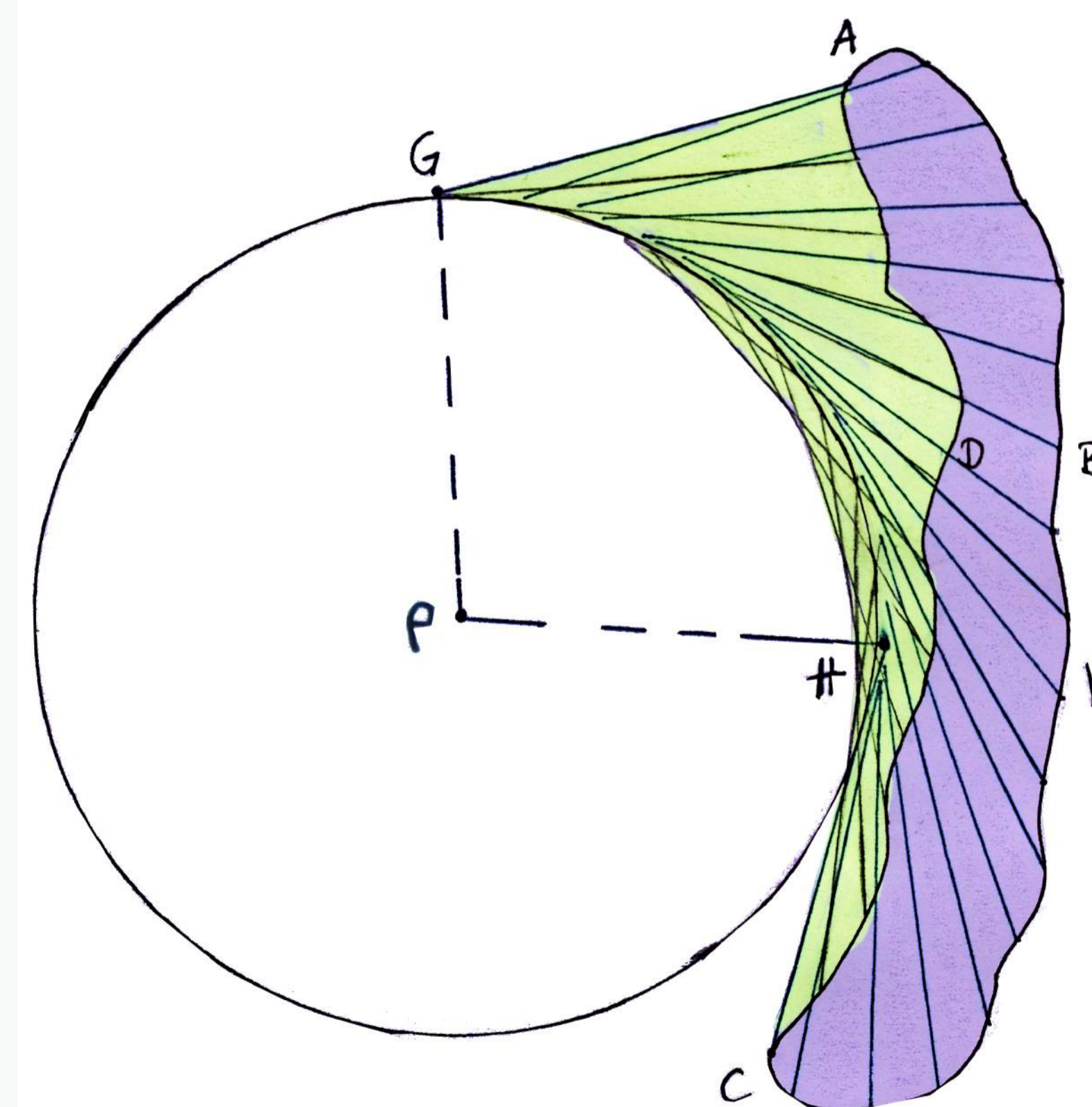


Abbildung: Überfahrene Fläche des Fahrarms

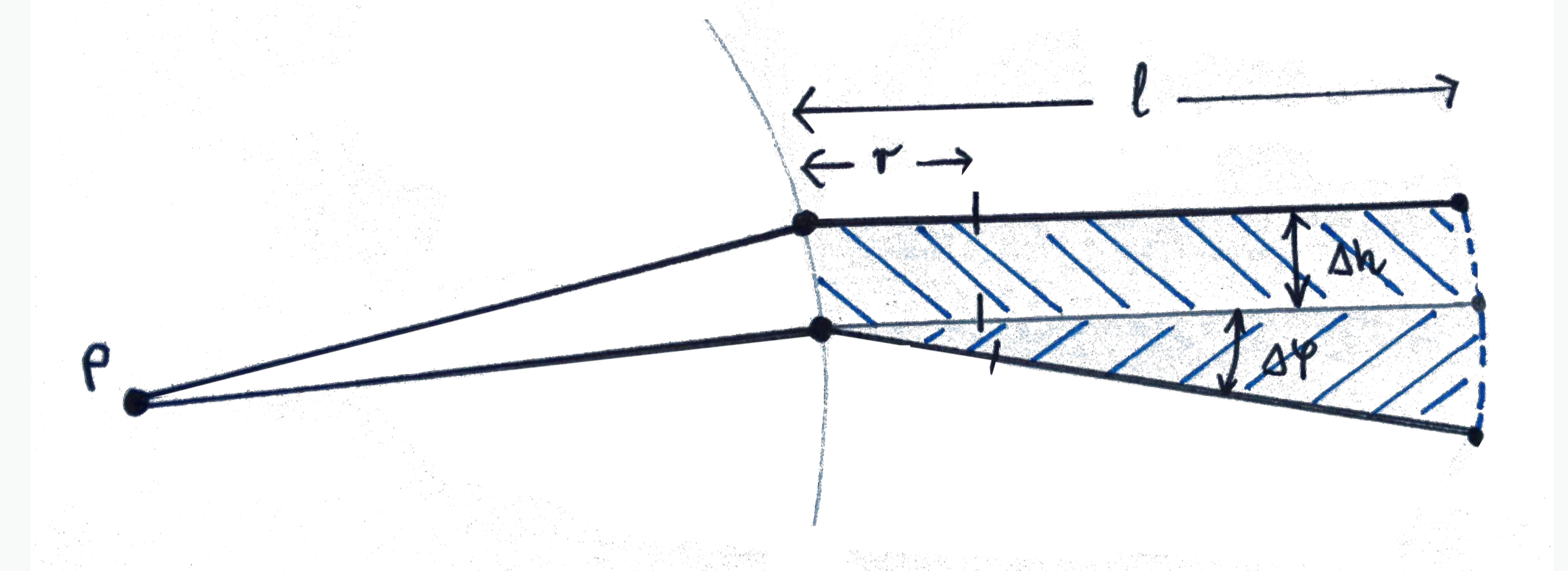


Abbildung: Betrachtung der Elementarfläche ΔM

Wir betrachten ein Element der Fläche ΔM , in der Abbildung blau schraffiert. Das ist die Fläche, die der Fahrarm erzeugt, wenn er sich nur minimal bewegt. Am Fahrarm der Länge l ist die Messrolle im Abstand r vom Gelenk entfernt angebracht. Wir können die Gesamtbewegung zerlegen: der Fahrarm bestreicht ein Parallelogramm mit Flächeninhalt $l\Delta h$ und bei der Drehung den Kreissektor, dessen Inhalt $1/2l^2\Delta\varphi$ ist. Somit ist die Elementarfläche

$$\Delta M = l\Delta h + \frac{1}{2}l^2\Delta\varphi \quad (1)$$

Welchen Weg Δu legt nun hierbei die Messrolle zurück? Während der Parallelverschiebung des Fahrarmes um Δh legt die Messrolle genau Δh zurück. Bei der Drehung des Fahrarmes um den Winkel $\Delta\varphi$ dreht sich die Rolle um $r\Delta\varphi$. Somit gilt also

$$\Delta u = \Delta h + r\Delta\varphi \quad (2)$$

Auflösen nach Δh und einsetzen in Gleichung (1) ergibt:

$$\begin{aligned} \Delta M &= l(\Delta u - r\Delta\varphi) + \frac{1}{2}l^2\Delta\varphi = \\ &= l\Delta u + \left(\frac{1}{2}l^2 - lr\right)\Delta\varphi \end{aligned} \quad (3)$$

Durch Addition aller Elementarflächen erhalten wir dann die Gesamtfläche M . Da die Stellung des Fahrarmes zu Beginn und Ende der Messung dieselbe ist, ist die gesamte Winkeländerung φ des Fahrarmes gleich Null. Der Inhalt der Fläche M ist damit das Produkt von Fahrarmlänge l und des gesamten zurückgelegten Weges der Messrolle u , d.h. die Summe aller Δu .

$$M = lu \quad (4)$$

Coradi, G. (1909). Die Planimeter Coradi. Aschmann und Scheller, Zürich.
 Jennings, G.A. (1951). Modern Geometry with Applications. Springer, New York.
 Staus, A. (1926). Maschinen-Untersuchungen. Hydraulik in ihren Anwendungen. Erster Band. 2. Aufl. Springer, Berlin.
 Vollrath, H.J. (2013). Verborgene Ideen. Historische mathematische Instrumente. Springer, Wiesbaden.