

Unterrichtsmaterialien

zu den Themen

Partielles Ableiten und Lagrange-Methode

von

Jacqueline Griebel

Diese Unterlagen entstanden im Seminar „Angewandte Mathematik im Mathe-Museum (SKILL.de)“.

Betreuung: Prof. Dr. Brigitte Forster-Heinlein, Lena Bachl
Professur für angewandte Mathematik, Universität Passau

Dieses Dokument finden Sie unter www.mathe-museum.uni-passau.de/



Partielles Ableiten

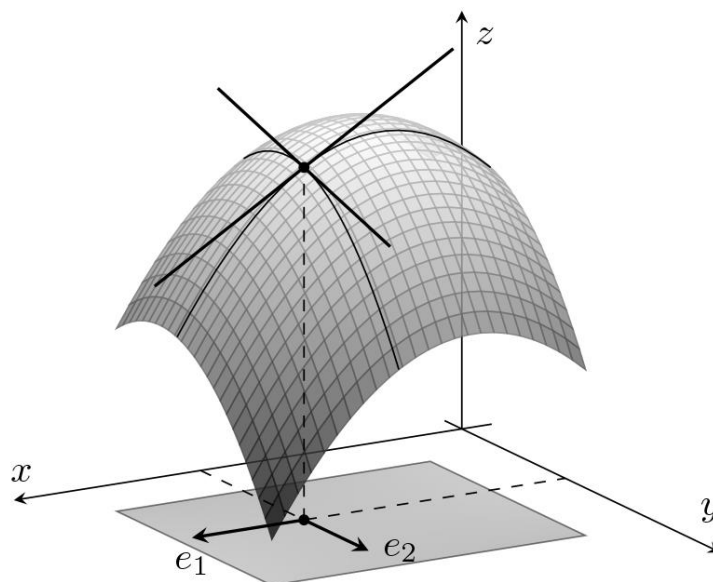
Bisher haben wir lediglich Funktionen mit einer Variablen abgeleitet, doch nun wollen wir uns solchen widmen, die über **mehrere Variablen** verfügen. Dazu bedarf es dem Konzept des **partiellen Ableitens**, bei dem nur noch eine Variable veränderlich ist und alle anderen konstant gehalten werden. Somit leiten wir wie gewohnt nach einer Variablen ab und können die uns vertrauten Ableitungsregeln anwenden.

Es sei darauf hingewiesen, dass wir hier ausschließlich Funktionen der Form

$$f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$$

betrachten und uns somit auf zwei Variablen beschränken.

Der zugehörige Graph lässt sich dementsprechend als Gebirge im Dreidimensionalen veranschaulichen. Des Weiteren geben die partiellen Ableitungen die **Steigung des Graphen in die jeweilige Koordinatenrichtung** an der Stelle $a = (x_0, y_0)$ an. Dies wird in der folgenden Abbildung mittels Tangenten dargestellt.



In Anbetracht dessen bezeichnen wir

- $\frac{\partial f(a)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+he_1) - f(a)}{h}$ als partielle Ableitung von f in a nach x und
- $\frac{\partial f(a)}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+he_2) - f(a)}{h}$ als partielle Ableitung von f in a nach y ,

insofern diese Grenzwerte existieren.

Das hier verwendete Symbol ∂ dient als Abgrenzung zur gewöhnlichen Ableitung und wird „del“ oder „d“ ausgesprochen.

Beispielhafte Anwendung der Ableitungsregeln bei Funktionen der Form $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y):$	
Summen-/Differenzregel $f(x) = g(x) \pm h(x)$ $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$ <u>Bsp.:</u> $f(x, y) = -4x + 2y^2 + 2y$ $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -4$ $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 4y + 2$	Produktregel $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$ <u>Bsp.:</u> $f(x, y) = x^3 y \cdot xy^2$ $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 3x^2 y \cdot xy^2 + x^3 y \cdot y^2$ $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x^3 \cdot xy^2 + x^3 y \cdot 2xy$
Quotientenregel $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad (h(x) \neq 0)$ $f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2}$ <u>Bsp.:</u> $f(x, y) = \frac{2y}{x^2} \quad (x \neq 0)$ $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{0 \cdot x^2 - 2y \cdot 2x}{(x^2)^2}$ $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{2 \cdot x^2 - 2y \cdot 0}{(x^2)^2}$	Kettenregel $f(x) = g(h(x))$ $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$ <u>Bsp.:</u> $f(x, y) = (2x + y)^3$ $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 3 \cdot (2x + y)^2 \cdot 2$ $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 3 \cdot (2x + y)^2 \cdot 1$

Insofern wir die Funktion f einmal ableiten, bilden wir die **ersten partiellen Ableitungen** der Form $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$. Leiten wir diese dann nochmals ab, so erhalten wir die **zweiten partiellen Ableitungen**. Diesbezüglich sind vier verschiedene Varianten möglich:

- $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$ (zuerst nach x und dann nach y differenzieren)
- $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$ (zuerst nach y und dann nach x differenzieren)
- $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$ (zweimal nach x differenzieren)
- $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$ (zweimal nach y differenzieren)

Beispiel:

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x, y) = 2x^2 + xy + y^2$.

Zunächst berechnen wir die partiellen Ableitungsfunktionen 1. Ordnung:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 4x + y \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x + 2y$$

Nun leiten wir diese ein weiteres Mal ab und erhalten dadurch die partiellen Ableitungsfunktionen 2. Ordnung:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = 4 \qquad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = 1 = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 2$$

Die Gleichheit von $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$ und $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$ ist hier kein Zufall, denn bestimmen wir diese für jede beliebige Funktion, so erhalten wir immer das gleiche Resultat. Somit können wir uns Folgendes merken:

$$\boxed{\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}}$$

Aufgaben:

1) Bilde die ersten partiellen Ableitungen der gegebenen Funktionen nach ihren Variablen. Algebraische Vereinfachungen sind nicht erforderlich.

a) $f(x, y) = 2x + 3y$

d) $f(x, y) = (3x^2 + 4y) \cdot e^{5y}$

b) $f(x, y) = xe^y$

e) $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} \quad (x \neq \pm y)$

c) $f(x, y) = x \cdot \sin(y)$

f) $f(x, y) = 2xe^y + 3 \sin(xy)$

2) Bilde die ersten und zweiten partiellen Ableitungen der gegebenen Funktionen hinsichtlich ihrer Variablen. Algebraische Vereinfachungen sind nicht erforderlich.

a) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$

c) $f(x, y) = x^3 + e^{xy}$

b) $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + y$

d) $f(x, y) = 3x^2y^3 + 2y \ln(x)$

Lösungen:Aufgabe 1

a) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3$

b) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^y$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = xe^y$

c) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \sin(y)$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x \cdot \cos(y)$

d) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 6x \cdot e^{5y}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 4 \cdot e^{5y} + (3x^2 + 4y) \cdot e^{5y} \cdot 5$

e) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{2x \cdot (x^2 - y^2) - (x^2 + y^2) \cdot 2x}{(x^2 - y^2)^2}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{2y \cdot (x^2 - y^2) - (x^2 + y^2) \cdot (-2y)}{(x^2 - y^2)^2}$

f) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2e^y + 3 \cos(xy) \cdot y$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2xe^y + 3 \cos(xy) \cdot x$

Aufgabe 2

a) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -6xy$

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 6x$

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = -6x$

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = -6y$

b) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 4x + 3y$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3x + 1$

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 4$

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0$

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 3$

c) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2 + e^{xy} \cdot y$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = e^{xy} \cdot x$

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 6x + e^{xy} \cdot y^2$

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = e^{xy} \cdot x^2$

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = e^{xy} \cdot x \cdot y + e^{xy} \cdot 1$

d) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 6xy^3 + \frac{2y}{x}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 9x^2y^2 + 2 \ln(x)$

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 6y^3 - \frac{2y}{x^2}$

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 18x^2y$

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 18xy^2 + \frac{2}{x}$

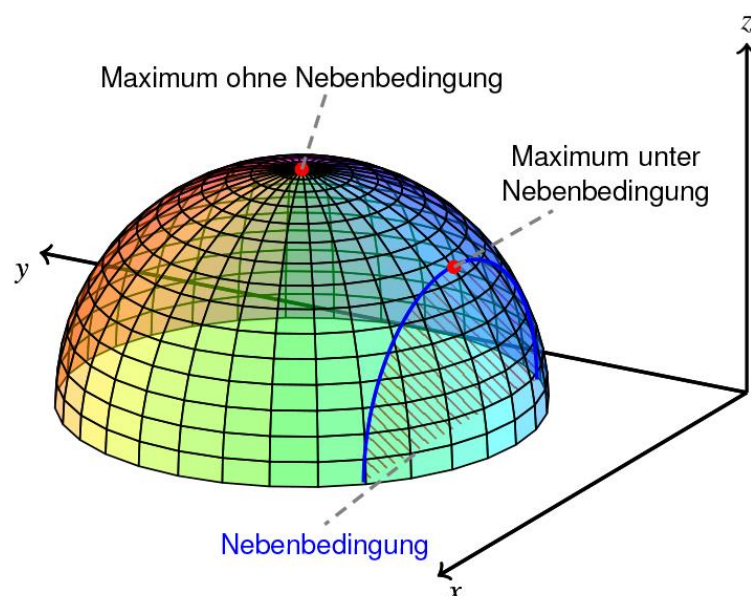
Die Lagrange-Methode

Bisher verwendeten wir bei **Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen** (in Form einer Gleichung), in denen (mindestens) zwei Variablen auftauchten, stets die **Einsatzmethode** bzw. das **Verfahren der Variablensubstitution**.

Hierbei lösten wir die Nebenbedingungen jeweils nach einer Variablen auf und setzen dies dann in die zu optimierende Zielfunktion ein, sodass diese nur noch von einer Variablen abhängig war. Jedoch können sich Schwierigkeiten beim Umformen der Nebenbedingungen ergeben. Damit ist gemeint, dass sie sich gar nicht auf eine Variable auflösen lassen oder durch deren mathematisch umständliche Form das nachfolgende Ableiten unnötig erschwert wird. Letzteres ist z. B. bei nichtlinearen Nebenbedingungen häufig der Fall.

Hier schafft die sogenannte **Lagrange-Methode** bzw. **Lagrange-Multiplikatorenregel** Abhilfe, welche im Jahre 1797 von dem Astronom und Mathematiker Joseph-Louis de Lagrange veröffentlicht wurde. Dieses Verfahren stellt lediglich eine **notwendige Bedingung** für potentielle Extremalstellen dar und umfasst die ersten vier Schritte der unten aufgeführten Vorgehensweise bei der Extremwertbestimmung. Die hinreichende Bedingung wird im achten Schritt aufgezeigt. Es sei betont, dass wir uns hier einfachheitshalber auf Optimierungsprobleme mit lediglich zwei Variablen und einer Nebenbedingung beschränken, obwohl diese Methode auch bei solchen höherer Dimensionen anwendbar ist.

Wir können uns dies im Falle einer Maximierung so vorstellen, dass wir nicht den Gipfel eines Funktionsgebirges suchen, sondern den höchsten Punkt, den man mit einem durch die Nebenbedingung festgelegten Wanderweg erreicht. Die nebenstehende Grafik dient zu dessen Veranschaulichung.



Vorgehen beim Lösen von Extremwertproblemen folgender Form mithilfe der Lagrange-Methode:

Gegeben sei die zu optimierende Zielfunktion $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ und die Nebenbedingung $h(x, y) = 0$.

1. Stelle die **Lagrange-Funktion** folgender Form auf:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot h(x, y).$$

Die Hilfsvariable $\lambda \in \mathbb{R}$ wird **Lagrange-Multiplikator** genannt.

2. Bilde die ersten partiellen Ableitungen der Funktion \mathcal{L} nach ihren Variablen.
3. Setze die ersten partiellen Ableitungen mit Null gleich und es ergibt sich das nachstehende Gleichungssystem:

$$(I) \quad \frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial x} = 0$$

$$(II) \quad \frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial y} = 0$$

$$(III) \quad \frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = 0$$

4. Bestimme die **stationären Stellen** durch das Lösen dieses Gleichungssystems. Diese sind lediglich potentielle Extremalstellen.
5. Wende die Schritte 2 und 3 ebenso bei der Funktion h an und erhalte das folgende Gleichungssystem:

$$(I) \quad \frac{\partial h(x, y)}{\partial x} = 0$$

$$(II) \quad \frac{\partial h(x, y)}{\partial y} = 0$$

6. Insofern dieses Gleichungssystem keine Lösungen besitzt, welche zusätzlich die Nebenbedingung erfüllen, wird sichergestellt, dass durch die stationären Stellen aus Schritt 4 bereits alle Kandidaten für lokale (relative) Extrema gegeben sind.
7. Bilde die zweiten partiellen Ableitungen der Funktion \mathcal{L} nach x und y .
8. Ferner sei die **Determinante** in allgemeiner Form wie folgt gegeben:

$$\Delta = 2 \cdot \frac{\partial h(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial h(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial h(x, y)}{\partial y} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial h(x, y)}{\partial x} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial y^2}.$$

Setze die x - und y -Werte der stationären Stellen aus Schritt 4, sowie die zugehörigen λ -Werte zur Entscheidung über die Art der Extrema in die jeweiligen partiellen Ableitungen ein. Ist die Determinante an der stationären Stelle **positiv (negativ)**, so liegt dort ein **lokales Maximum (Minimum)** vor.

9. Bestimme die globalen (absoluten) Extrema ggf. durch Vergleichen der entsprechenden Funktionswerte, insofern mehrere lokale Maxima oder Minima existieren.

Darüber hinaus kann es auch sein, dass die Zielfunktion und die Nebenbedingung erst aufgestellt werden müssen, wie es im folgenden Beispiel der Fall ist.

Beispiel:

Ein Schreiner möchte aus einem zylindrischen Baumstamm mit einem Durchmesser von 100 cm einen Balken herausschneiden.

Hilf dem Schreiner und berechne für ihn die Maße und den Flächeninhalt des maximalen rechteckigen Balkenquerschnitts.

Lösung:

Zunächst visualisieren wir uns das Problem mittels einer Skizze:

Anhand dessen können wir die zu maximierende Zielfunktion in Abhängigkeit von x und y wie folgt aufstellen:

$$A = f(x, y) = 4xy$$

Da das Rechteck einem Kreis mit Radius r einbeschrieben ist,

lässt sich die Nebenbedingung mithilfe des Satzes von Pythagoras

folgendermaßen formulieren: $x^2 + y^2 = r^2$ mit $r = \frac{100 \text{ cm}}{2} = 50 \text{ cm}$

Durch Einsetzen von r und Auflösen nach Null ergibt sich: $h(x, y) = 2500 - x^2 - y^2$

Nun können wir die oben beschriebenen Schritte anwenden.

1. Wir stellen die Lagrange-Funktion auf: $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 4xy + \lambda \cdot (2500 - x^2 - y^2)$

2. Nun bilden wir die zugehörigen ersten partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial x} = 4y - 2\lambda x$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial y} = 4x - 2\lambda y$$

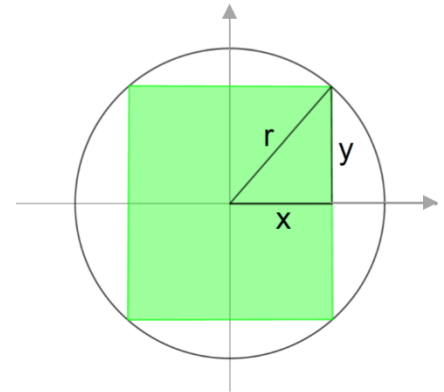
$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = 2500 - x^2 - y^2$$

3. Diese setzen wir mit Null gleich und erhalten das folgende Gleichungssystem:

$$(I) \quad 4y - 2\lambda x = 0$$

$$(II) \quad 4x - 2\lambda y = 0$$

$$(III) \quad 2500 - x^2 - y^2 = 0$$



4. Bevor wir dieses Gleichungssystem lösen, stellen wir zuerst klar, dass x und y ungleich Null sind. Denn wäre x gleich Null, so liefert dessen Einsetzen z. B. in Gleichung (I), dass auch y gleich Null ist. Analog ergibt sich dies für den Fall, dass y gleich Null ist. Somit sind beide gleich Null, insofern dies eine der Variablen ist. Dies erfüllt jedoch nicht Gleichung (III), weshalb x und y stets ungleich Null sind. Diese Folgerung erlaubt uns die unten dargestellte Anwendung des Additionsverfahrens:

$$\begin{aligned}
 (I) \cdot y - (II) \cdot x: \quad & 4y^2 - 2\lambda xy - (4x^2 - 2\lambda xy) = 0 \\
 \Leftrightarrow & 4y^2 - 4x^2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & 4y^2 = 4x^2 \\
 \Leftrightarrow & y^2 = x^2 \\
 \Leftrightarrow & y = \pm x
 \end{aligned}$$

Da x und y geometrische Größen darstellen, können wir $-x$ als Lösung ausschließen. Ersetzen wir nun y durch x in Gleichung (III), so erhalten wir

$x = \pm 25\sqrt{2}$, wobei wir $-25\sqrt{2}$ unberücksichtigt lassen können. Da wir bereits festgestellt haben, dass x und y stets gleich sind, gilt: $x = 25\sqrt{2} = y$

Das Einsetzen dieser Werte in Gleichung (I) oder (II) liefert den Wert von λ . Somit liegt bei $(25\sqrt{2}, 25\sqrt{2})$ eine stationäre Stelle vor mit $\lambda = 2$.

5. Nun bilden wir die ersten partiellen Ableitungen der Funktion h :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h(x, y)}{\partial x} &= -2x \\
 \frac{\partial h(x, y)}{\partial y} &= -2y
 \end{aligned}$$

Das Gleichsetzen mit Null führt zu folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
 (I) \quad -2x &= 0 \\
 (II) \quad -2y &= 0
 \end{aligned}$$

6. Die Lösungen $x = 0$ und $y = 0$ können direkt abgelesen werden. Doch wie wir bereits oben festgestellt haben, erfüllen diese die Nebenbedingung nicht und wir haben mithilfe der Lagrange-Methode bereits alle möglichen Extremalstellen gefunden.

7. Nun leiten wir die Lagrange-Funktion ein zweites Mal partiell nach x und y ab:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial x^2} = -2\lambda$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial y^2} = -2\lambda$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial x \partial y} = 4$$

8. Setzen wir nun die Werte von x , y und λ in die jeweiligen partiellen Ableitungen bzw. in die Formel zur Berechnung der Determinante ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Delta &= 2 \cdot (-2 \cdot 25\sqrt{2}) \cdot (-2 \cdot 25\sqrt{2}) \cdot 4 - (-2 \cdot 25\sqrt{2})^2 \cdot (-4) - (-2 \cdot 25\sqrt{2})^2 \cdot (-4) \\ &= 80000 > 0 \end{aligned}$$

Da die Determinante positiv ist, liegt an der Stelle $(25\sqrt{2}, 25\sqrt{2})$ ein lokales Maximum vor.

9. Da es keine weiteren lokalen Maxima gibt, ist das Maximum bei $(25\sqrt{2}, 25\sqrt{2})$ mit dem Funktionswert $f(25\sqrt{2}, 25\sqrt{2}) = 5000$ sogar global.

Da x und y jeweils die Hälfte einer Seitenlänge des Rechtecks ausmachen und gleich sind, ergibt sich ein Quadrat mit dem maximalen Flächeninhalt $A = 5000 \text{ cm}^2$ und der Seitenlänge $50\sqrt{2} \text{ cm}$ ($\approx 70,71 \text{ cm}$).

Aufgaben:

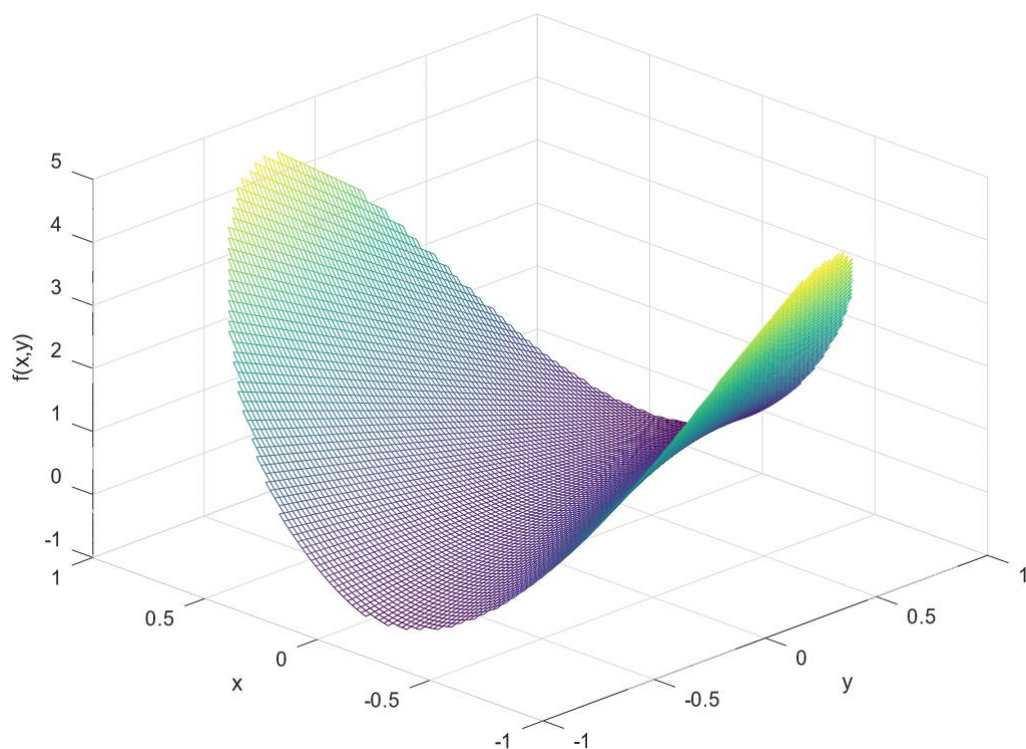
Für Anfänger:

- 1) Löse nun das obige Beispiel mithilfe der Einsetzmethode und vergleiche den Aufwand dieser zwei Verfahren miteinander.
- 2) Überlege dir beispielhafte Nebenbedingungen, bei denen die Lagrange-Methode hilfreich sein kann. Begründe zudem kurz, warum sie in diesem Fall von Nutzen ist.

Für Fortgeschrittene:

- 3) Betrachte das Extremwertproblem mit der zu optimierenden Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y + 5$ unter der Nebenbedingung $h(x, y) = x^2 - y = 0$.
 - a) Stelle die Lagrange-Funktion auf.
 - b) Bestimme die stationären Stellen.
 - c) Überprüfe, ob bereits alle potentiellen Extremstellen ermittelt wurden.

- d) Untersuche die gefundenen stationären Stellen hinsichtlich der Art der Extrema.
- e) Gib die Stellen der globalen Extrema und die zugehörigen Funktionswerte an.
- 4) Betrachte das Extremwertproblem mit der zu optimierenden Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 4x^2 - 3xy$ unter der Nebenbedingung $h(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.
- a) Bestimme die Funktionswerte und die Art der mithilfe der Lagrange-Methode ermittelten Extremstellen
- $$a_1 = \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right), a_2 = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right), a_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \text{ und } a_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right).$$
- b) Zeichne die Funktionswerte aus Teilaufgabe a) in die nachfolgende Grafik ein.



Für Experten:

- 5) Löse die folgende Aufgabe unter Anwendung der Lagrange-Methode:
- Heutzutage spielt das Thema Umweltschutz eine wichtige Rolle, weshalb sich auch Dosenproduzenten das Ziel der Abfallvermeidung gesetzt haben. Die meisten von ihnen fertigen zylindrische, beidseitig geschlossene Konservendosen mit einem Fassungsvermögen von 333 cm^3 .
- Hilf den Produzenten bei der Berechnung der minimalen Oberfläche und gib das Verhältnis von Höhe und Durchmesser an.

Lösungen:Aufgabe 1

Die Zielfunktion $A = f(x, y) = 4xy$ und die Nebenbedingung in Form von $x^2 + y^2 = r^2$ mit $r = \frac{100 \text{ cm}}{2} = 50 \text{ cm}$ erhalten wir durch gleiches Vorgehen wie oben.

Gemäß der Einsetzmethode lösen wir nun nach y auf: $y = \pm\sqrt{2500 - x^2}$

Da x und y geometrische Größen sind, machen nur positive Werte Sinn. Deswegen wird lediglich $y = +\sqrt{2500 - x^2}$ in die Zielfunktion eingesetzt und wir erhalten:

$$A = f(x) = 4x \cdot \sqrt{2500 - x^2} \quad \text{mit } \mathbb{D}_{\max} = [-2500; 2500]$$

In Anbetracht des geometrischen Hintergrunds ist ein sinnvoller Definitionsbereich durch das Intervall $[0; 2500]$ gegeben.

Die erste Ableitung der Zielfunktion lautet:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{2500-x^2}} + \sqrt{2500-x^2} \cdot 4 = \frac{-4x^2}{\sqrt{2500-x^2}} + \sqrt{2500-x^2} \cdot 4 \\ &= \frac{-4x^2 + (2500-x^2) \cdot 4}{\sqrt{2500-x^2}} = \frac{-8x^2 + 10000}{\sqrt{2500-x^2}} = \frac{4 \cdot (2500 - 2x^2)}{\sqrt{2500-x^2}} \end{aligned}$$

Nun ermitteln wir die zugehörigen Nullstellen:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4 \cdot (2500 - 2x^2)}{\sqrt{2500-x^2}} = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot (2500 - 2x^2) = 0 \Leftrightarrow 2500 - 2x^2 = 0$$

Dadurch ergibt sich: $x = \pm 25\sqrt{2}$

Diesbezüglich können wir den negativen Wert wieder vernachlässigen. Da $f'(x)$ für $0 \leq x < 25\sqrt{2}$ positiv und für $25\sqrt{2} < x \leq 50$ negativ ist, liegt ein Vorzeichenwechsel vor. Somit ist an der Stelle $x = 25\sqrt{2}$ ein lokales und sogar globales Maximum gegeben.

Setzen wir nun noch die Lösung von x in die nach y aufgelöste Nebenbedingung ein, so erhalten wir: $y = 25\sqrt{2}$

Folglich handelt es sich um ein Quadrat mit der Seitenlänge

$$2 \cdot 25\sqrt{2} \text{ cm} = 50\sqrt{2} \text{ cm} \approx 70,71 \text{ cm}$$

und dem maximalen Flächeninhalt $A = f(25\sqrt{2}) = 5000 \text{ cm}^2$.

Bei der Einsetzmethode ist z. B. das Ableiten und Zusammenfassen aufwendiger.

Aufgabe 2

Ein paar Beispiele wären:

- $h(x, y) = x^2 + y^2 = 0$

Das Auflösen auf eine Variable ist hier nicht möglich, da die Quadratwurzel nicht aus einer negativen Zahl gezogen werden kann.

- $h(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 = 0$

Das Auflösen auf eine Variable bereitet hier große Schwierigkeiten.

- $h(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$

Das Auflösen auf eine Variable ist hier zwar möglich, jedoch wird das anschließende Ableiten unnötig erschwert durch $x = \sqrt{25 - y^2}$ bzw. $y = \sqrt{25 - x^2}$.

Aufgabe 3

a) $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x + y + 5 + \lambda \cdot (x^2 - y)$

b) Die ersten partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion lauten:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial x} = 1 + 2\lambda x$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial y} = 1 - \lambda$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = x^2 - y$$

Gleichsetzen mit Null ergibt folgendes Gleichungssystem:

$$(I) \quad 1 + 2\lambda x = 0$$

$$(II) \quad 1 - \lambda = 0$$

$$(III) \quad x^2 - y = 0$$

Aus Gleichung (II) folgt $\lambda = 1$ und dies eingesetzt in (I) liefert $x = -\frac{1}{2}$. Durch Einsetzen dieser Lösung in Gleichung (III) erhalten wir $y = \frac{1}{4}$. Somit liegt bei $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ mit $\lambda = 1$ eine stationäre Stelle vor.

c) Die ersten partiellen Ableitungen der Nebenbedingung sind gegeben durch:

$$\frac{\partial h(x, y)}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial h(x, y)}{\partial y} = -1$$

Setzen wir diese mit Null gleich, so erhalten wir das nachstehende Gleichungssystem:

$$(I) \quad 2x = 0$$

$$(II) \quad -1 = 0$$

Bei Gleichung (II) liegt eine falsche Aussage vor, weswegen das Gleichungssystem keine Lösung besitzt. Dementsprechend wurden bereits alle möglichen Extremstellen gefunden.

- d) Bilden wir nun die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung in Bezug auf die Lagrange-Funktion:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial x^2} = 2\lambda$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial x \partial y} = 0$$

Setzen wir $x = -\frac{1}{2}$ und $\lambda = 1$ in die jeweiligen partiellen Ableitungen ein, so ergibt sich die folgende Determinante:

$$\Delta = 2 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 0 - (-1)^2 \cdot 2 - (-1)^2 \cdot 0 = -2 < 0$$

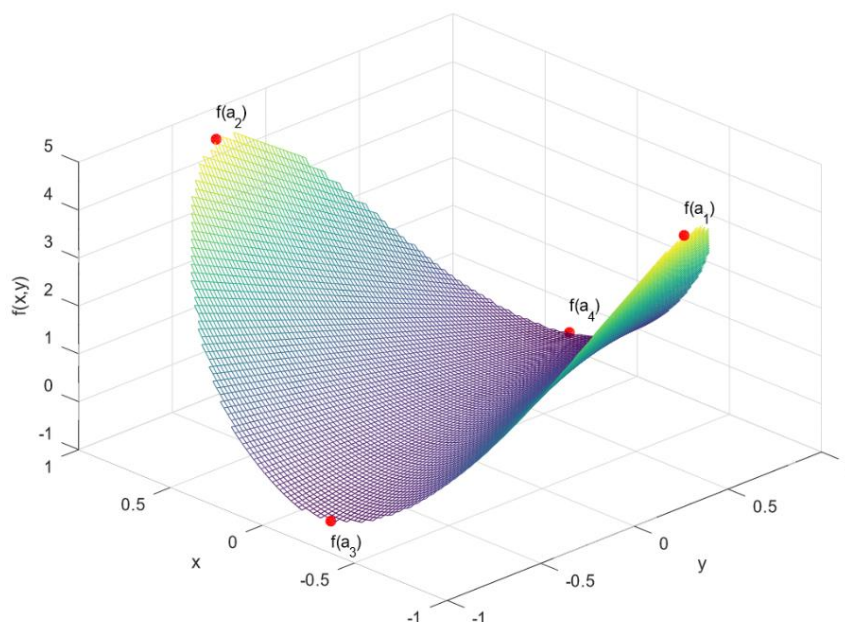
Somit liegt hier ein lokales Minimum vor.

- e) Da keine weiteren lokalen Minima gegeben sind, liegt an der Stelle $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ ein globales Minimum mit dem Funktionswert $f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \frac{19}{4}$ vor.

Aufgabe 4

- a) Maximum mit $f(a_1) = \frac{9}{2} = f(a_2)$ & Minimum mit $f(a_3) = -\frac{1}{2} = f(a_4)$

b)



Aufgabe 5

Die Oberfläche der Dose besteht aus zwei Kreisflächen (Deckel und Boden) und einer Mantelfläche. Somit ergibt sich die folgende Zielfunktion:

$$O = f(r, h) = 2r^2\pi + 2r\pi h$$

Die Nebenbedingung ergibt sich durch das vorgegebene Fassungsvermögen der Dose und lautet: $r^2\pi h = 333$

Durch Umstellen nach Null erhalten wir: $h(r, h) = 333 - r^2\pi h$

1. Die Lagrange-Funktion lautet: $\mathcal{L}(r, h, \lambda) = 2r^2\pi + 2r\pi h + \lambda \cdot (333 - r^2\pi h)$

2. Wir bilden nun die ersten partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(r, h, \lambda)}{\partial r} = 4r\pi + 2\pi h - 2\lambda r\pi h$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(r, h, \lambda)}{\partial h} = 2r\pi - \lambda r^2\pi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(r, h, \lambda)}{\partial \lambda} = 333 - r^2\pi h$$

3. Gleichsetzen mit Null ergibt folgendes Gleichungssystem:

$$(I) \quad 4r\pi + 2\pi h - 2\lambda r\pi h = 0$$

$$(II) \quad 2r\pi - \lambda r^2\pi = 0$$

$$(III) \quad 333 - r^2\pi h = 0$$

4. Zunächst halten wir noch fest, dass weder r noch h gleich Null sein kann, da ansonsten die Dose kein Volumen hätte. Somit gilt in Anbetracht des geometrischen Hintergrunds, dass $r, h \in \mathbb{R}^+$ sind.

Stellen wir nun die Gleichung (II) nach λ um: $\lambda = \frac{2r+h}{rh}$

Analog dazu ergibt sich für Gleichung (III): $\lambda = \frac{2}{r}$

Nun wenden wir das Gleichsetzungsverfahren an:

$$\frac{2}{r} = \frac{2r+h}{rh} \Leftrightarrow 2rh = 2r^2 + rh \Leftrightarrow rh = 2r^2 \Leftrightarrow h = 2r$$

Setzen wir dies nun in Gleichung (III) ein, so erhalten wir: $r = \sqrt[3]{\frac{333}{2\pi}}$ ($\approx 3,76$)

Infolgedessen können wir die Werte von h und λ ermitteln:

$$h = 2\sqrt[3]{\frac{333}{2\pi}} (\approx 7,51) \text{ und } \lambda = \frac{2}{\sqrt[3]{\frac{333}{2\pi}}} (\approx 0,53)$$

Also liegt an der Stelle $\left(\sqrt[3]{\frac{333}{2\pi}}, 2\sqrt[3]{\frac{333}{2\pi}}\right)$ mit $\lambda = \frac{2}{\sqrt[3]{\frac{333}{2\pi}}}$ eine stationäre Stelle vor.

5. Die ersten partiellen Ableitungen der Funktion h sind gegeben durch:

$$\frac{\partial h(r, h)}{\partial r} = -2r\pi h$$

$$\frac{\partial h(r, h)}{\partial h} = -r^2\pi$$

Setzen wir diese mit Null gleich, so erhalten wir das nachstehende Gleichungssystem:

$$(I) \quad -2r\pi h = 0$$

$$(II) \quad -r^2\pi = 0$$

6. Da wir in Schritt 4 bereits festgestellt haben, dass r und h ungleich Null sind, haben wir bereits alle möglichen Extremstellen gefunden.

7. Bilden wir nun die zweiten partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(r, h, \lambda)}{\partial r^2} = 4\pi - 2\lambda\pi h$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(r, h, \lambda)}{\partial h^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(r, h, \lambda)}{\partial h \partial r} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}(r, h, \lambda)}{\partial r \partial h} = 2\pi - 2\lambda r\pi$$

8. Setzen wir jetzt die Werte von r, h und λ in die jeweiligen partiellen Ableitungen bzw. in die Formel zur Berechnung der Determinante ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Delta &= 2 \cdot \left(-4\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{333}{2\pi}} \right)^2 \right) \cdot \left(-\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{333}{2\pi}} \right)^2 \right) \cdot (-2\pi) - \left(-\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{333}{2\pi}} \right)^2 \right)^2 \cdot (-4\pi) \\ &\quad - \left(-4\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{333}{2\pi}} \right)^2 \right)^2 \cdot 0 \\ &\approx -74071,31 < 0 \end{aligned}$$

Da die Determinante negativ ist, liegt an dieser Stelle ein lokales Minimum vor.

9. Da es keine weiteren lokalen Minima gibt, ist das Minimum bei $\left(\sqrt[3]{\frac{333}{2\pi}}, 2\sqrt[3]{\frac{333}{2\pi}} \right)$ mit

dem Funktionswert $f\left(\sqrt[3]{\frac{333}{2\pi}}, 2\sqrt[3]{\frac{333}{2\pi}}\right) \approx 265,96$ sogar global.

Die Dose besitzt also einen Radius von $3,76 \text{ cm}$, eine Höhe von $7,51 \text{ cm}$ und eine

minimale Oberfläche von $O = f\left(\sqrt[3]{\frac{333}{2\pi}}, 2\sqrt[3]{\frac{333}{2\pi}}\right) \approx 265,96 \text{ cm}^2$.

(Bei Verwendung der gerundeten Werte resultiert $O \approx 266 \text{ cm}^2$.)

Das Verhältnis von Dosenhöhe und Durchmesser ergibt sich durch:

$$\frac{h}{2r} = \frac{2^3 \sqrt{\frac{333}{2\pi}}}{2^3 \sqrt{\frac{333}{2\pi}}} = 1$$

Somit hat die Dose mit der minimalen Oberfläche einen Axialquerschnitt in Form eines Quadrats.

Literatur zum Weiterlesen:

Christian Karpfinger. *Höhere Mathematik in Rezepten*. Springer Berlin Heidelberg, 2015.

Michael Merz and Mario V. Wüthrich. *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*. Vahlen Franz GmbH, 2012.

Karl Mosler, Rainer Dyckerhoff, and Christoph Scheicher. *Mathematische Methoden für Ökonomen*. Springer Berlin Heidelberg, 2018.